

الهندسة

(١) متوسطات المثلث .

(٢) المثلث المتساوى الساقين .

(٣) نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين .

(٤) التباين.

(٥) المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث .

(٦) المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث .

(٧) متباينة المثلث .



مراجعة على ما سبق

** الزاويتان المتجاورتان الحادثتان من تقاطع مستقيم وشعاع نقطة بدايته تقع على هذا المستقيم متكاملتان

** إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان فى القياس

** مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة واحدة = ٣٦٠°

** حالات تطابق مثلثين :

١ يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر

٢ يتطابق المثلثان إذا تطابق زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر

٣ يتطابق المثلثان إذا تطابق كل ضلع فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر

٤ يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق وتر وأحد ضلعى القائمة فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر




** إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن :

١ كل زاويتين متبادلتين متساويتين فى القياس

٢ كل زاويتين متناظرتين متساويتين فى القياس

٣ كل زاويتين داخلتين و فى جهة واحدة من القاطع متكاملتان

** متوازى الأضلاع :

هو شكل رباعى فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان

ء أ ب حـ

خواص متوازى الأضلاع :

١ كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول

٢ كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس

٣ كل زاويتين متتاليتين متكاملتان

٤ القطران ينصف كل منهما الآخر

** مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوى ١٨٠

** قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها



** إذا ساوى قياسا زاويتين فى مثلث قياسا زاويتين فى مثلث آخر فإن قياس الزاوية الثالثة فى المثلث الأول قياس الزاوية الثالثة فى المثلث الآخر

** فى أى مثلث توجد زاويتان حادتان على الأقل

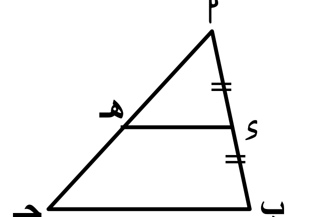
** إذا ساوى قياس زاوية فى مثلث مجموع قياسى الزاويتين الأخريين كان المثلث قائم الزاوية

** الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى مثلث موازياً أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث

فى الشكل المقابل : إذا كان Δ ٢ ب حـ فيه ء منتصف $\overline{٢ب}$

، $\overleftarrow{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$ فإن :

٢ هـ = هـ حـ

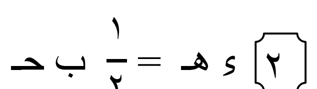


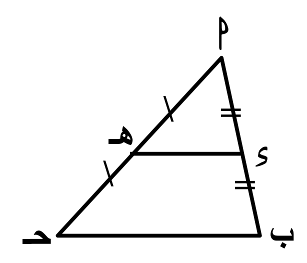
** القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث

وطولها يساوى نصف طول هذا الضلع

فى الشكل المقابل إذا كان : Δ ٢ ب حـ فيه ء منتصف $\overline{٢ب}$ ،هـ منتصف $\overline{٢حـ}$ فإن :







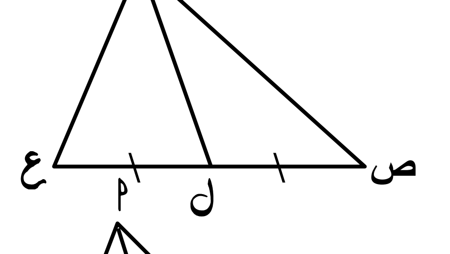
** محيط أى مضلع يساوى مجموع أطوال أضلاعه.

متوسطات المثلث



متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس .

* المثلث له ٣ متوسطات



نظرية ١

متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً فى نقطة واحدة .

، تسمى نقطة م نقطة تقاطع متوسطات المثلث



نظرية ٢

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها

بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة

ملاحظات هامة





١ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ٢ : ١من جهة الرأس

٢ فى ∆ م ب حـ إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطاته فإن :

م ء = $\frac{١}{٣}$ م ء ، م م = $\frac{٢}{٣}$ م ء ، م م = ٢ م ء

٣ المثلث المتساوى الأضلاع متوسطاته الثلاثة متساوية فى الطول .

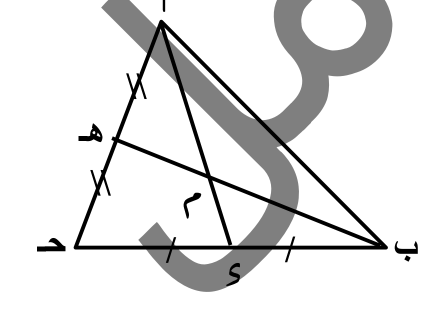
حقيقة

فى ∆ م ب حـ إذا كان $\overline{\text{م ء}}$ متوسط ، م ∈ $\overline{\text{م ء}}$ بحيث م م = ٢ م ء

فإن : م تكون نقطة تقاطع متوسطات ∆ م ب حـ



تدريب١: **بإستخدام الشكل المقابل أكمل :**





(١) إذا كان : م ء = ٣ سم فإن : م م = ...

(٢) إذا كان : م ء = ٤ سم فإن : م ء = ...

(٣) إذا كان : م م = ١٠ سم فإن : ء م = ...

(٤) إذا كان : ب هـ = ١٨ سم فإن : ب م =.........

(٥) إذا كان : ب هـ = ١٢ سم فإن :هـ م = ...

نظرية ٣ طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث

عكس نظرية ٣


إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة

نتيجة

طول الضلع المقابل لزاوية قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر

فى الشكل المقابل : إذا كان: Δ م ب حـ فيه ق (م ب جـ) = ٩٠°

، ق (م حـ ب) = ٣٠°

فإن : م ب = $\frac{١}{٢}$ م جـ


تدريب٢: **بإستخدام الشكل المقابل أكمل :**


(١) إذا كان : م ب = ١٠ سم فإن : م حـ = ...

(٢) إذا كان : م حـ = ٦ سم فإن : م ب = ...

(٣) إذا كان : م ب = ٨ سم فإن : حـ هـ = ...

(٤) إذا كان : حـ هـ = ٣ سم فإن : م ب = ...

(٥) إذا كان : م ب = ١٨ سم فإن : حـ م = ...

(٦) إذا كان : م ب = ١٥ سم فإن : هـ م = ...

(٧) إذا كان : حـ م = ٤ سم فإن : م ب = ...

(٨) إذا كان : م ب = ١٨ سم ، م ء = ١٢ سم فإن : محيط Δ م م حـ = ...



تدريب (١)

فى الشكل المقابل :

Δ ٢ ب حـ فيه ء ، هـ منتصفى $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{٢ حـ}}$

على الترتيب فإذا كان ب هـ = ١٢ سم ، م ء = ٦ سم ،

٢ حـ = ٨ سم أوجد محيط Δ ٢ م هـ

الحل

المعطيات ....

....

....

المطلوب ....

البرهان







تدريب (٢)

فى الشكل المقابل :

∆ ٢ ب حـ فيه ء ، هـ منتصفى $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{٢ حـ}}$ على الترتيب فإذا كان ب هـ = ١٢ سم ، ٢ ء = ٩ سم ، ٢ ب = ١٠ سم أوجد محيط ∆م هـ ء.

الحل

المعطيات ....

....

....

المطلوب ....

البرهان





تدريب (٣)

الأزهر ٢٠١٣/٢٠١٤ فى الشكل المقابل :

ق (∠م ب ج) = ٩٠° س منتصف $\overline{\text{م ب}}$

ص منتصف $\overline{\text{ب ج}}$ ، ء منتصف $\overline{\text{س ص}}$

أوجد طول $\overline{\text{ب ء}}$ ، م ج = ٢٠سم

الحل

المعطيات ....

....

....

المطلوب ....

البرهان



تدريب (٤)

فى الشكل المقابل :

Δ ٢ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، $\overline{\text{٢ ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ متوسطان متقاطعان فى م ، ق (٢ حـ ب) = ٣٠° ، ٢ ب = ٦ سم ، ٢ ء = ٧,٥ سم أوجد محيط Δ ٢ م هـ .

الحل

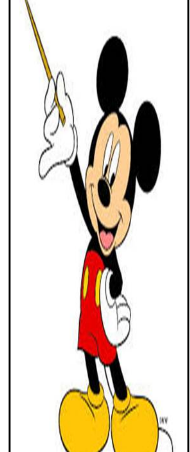
المعطيات ....

....

....

المطلوب ....

البرهان







تدريب (٥)

فى الشكل المقابل :

هـ ، و ، م منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{أ ء}$ ؛ $\overline{ب ء}$

على الترتيب ، ق (ب حـ ء) = ٩٠

أثبت أن : هـ و = حـ م

الحل

المعطيات ....

....

المطلوب ....

البرهان





١ أكمل ما يأتى :

(١) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة .... من جهة الرأس .

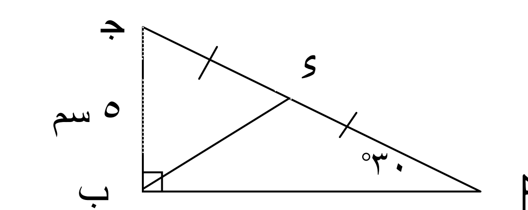
(٢) متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً فى ....

(٣) طول الضلع المقابل لزاوية قياسها ٣٠ فى المثلث القائم الزاوية يساوى ....

(٤) طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى ....

(٥) النقطة التى تقسم متوسطات المثلث بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة هى ....

٢ إمتحان ٢٠١٠/٢٠١١ فى الشكل المقابل :



(م) Δ م ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق (م̂) = ٣٠°

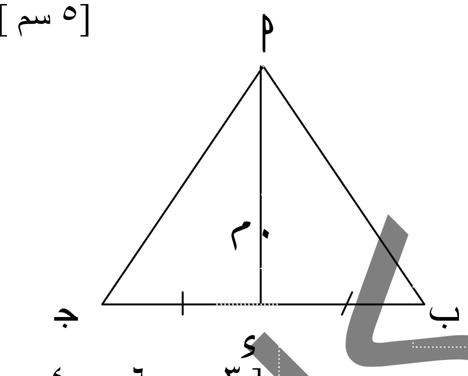
ء منتصف $\overline{\text{م جـ}}$ ، ب جـ = ٥ سم

أوجد طول $\overline{\text{ب ء}}$.

[٥ سم]



(ب) فى الشكل المقابل :



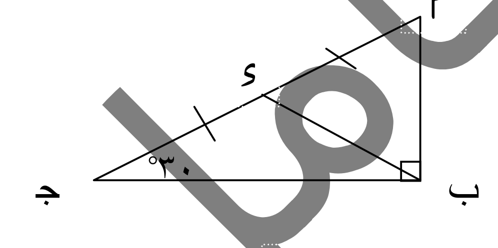
Δ م ب حـ فيه $\overline{\text{م ء}}$ متوسط ، م نقطة تقاطع متوسطاته فإذا كان

م ء = ٩ سم ، ب جـ = ٨ سم أوجد طول $\overline{\text{ء م}}$ ، $\overline{\text{م م}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

[٣ سم ، ٦سم ، ٤ سم]



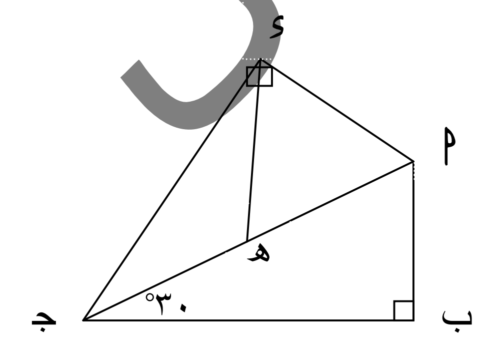
٣ الأزهر ٢٠١١/٢٠١٢ فى الشكل المقابل :



م حـ = ١٠ سم ، ق (جـ̂) = ٣٠° ، م ء = ءجـ

، ق (ب̂) = ٩٠° إحسب محيط Δ م ب ء.

٤ الأزهر ٢٠١٠/٢٠١١ فى الشكل المقابل :



ق (م ب̂ جـ) = ق (م ء̂ جـ) = ٩٠°

ق (م جـ̂ ب) = ٣٠° ، هـ منتصف $\overline{\text{م جـ}}$

أثبت أن م ب = ء هـ .

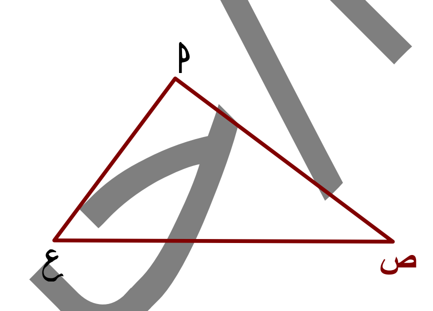


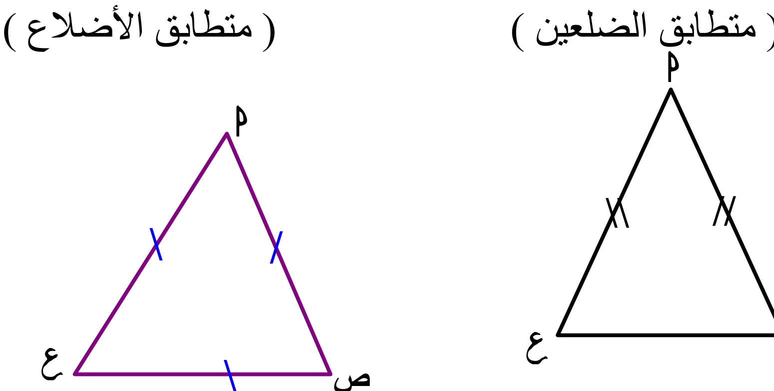
المثلث المتساوى الساقين

نعلم أن :

تصنف المثلثات حسب أطوال أضلاعها إلى ثلاثة أنواع هى :

مثلث مختلف الأضلاع	مثلث متساوى الساقين (متطابق الضلعين)	مثلث متساوى الأضلاع (متطابق الأضلاع)





ꟿ ص ≠ ص ع ≠ ꟿ ع　　　ꟿ ص = ꟿ ع　　　ꟿ ص = ص ع = ع ꟿ

خواص المثلث المتساوى الساقين

١ زاوية رأس المثلث المتساوى الساقين تكون حادة أو منفرجة أو قائمة .

٢ زاويتا القاعدة حادتين .

نظريات المثلث التساوى الساقين

نظرية ١ زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان

أكمل ما يأتى :



** إذا كان : Δ ꟿ ب حـ فيه ꟿ ب = ꟿ حـ ، ق (ب̂) = ٥٠° فإن : ق (ꟿ̂) = ...

** إذا كان : Δ ꟿ ب حـ فيه ꟿ ب = ꟿ حـ ، ق (ꟿ̂) = ٧٠° فإن : ق (حـ̂) = ...

نتيجة١

إذا كان المثلث المتساوى الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة و يكون قياس كل منها ٦٠°



تدريب (١)

فى الشكل المقابل :

Δ ٩ ب حـ فيه ٩ ب = ٩ حـ

، ق (٩̂) = ٧٠° ، Δ ء هـ ب

متساوى الأضلاع . أوجد : ق (٩ ب̂ ء)

أكمل البرهان التالى لإيجاد ق (٩ ب̂ ء)

المعطيات ....

المطلوب ....

البرهان ∵ Δ ٩ ب حـ فيه ٩ ب = ٩ حـ ، ق (٩) = ...

∴ ق (٩ ب̂حـ) = ...

∵ Δ ء هـ ب متساوى الأضلاع ∴ ق (ء ب هـ) = ...

∴ ق (٩ ب̂ ء) = ...



نظرية٢ إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ويكون المثلث متساوى الساقين

نتيجة٢ إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الأضلاع



ملاحظة المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون متساوى الأضلاع

تدريب (٢)

في الشكل المقابل :

ﻡ ب = ﻡ جـ ، ق (ب ﻡ̂ ج) = ٤٨°

$\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ينصف ∠ب جـ ﻡ ويقطع $\overline{\text{ﻡ ب}}$ في ء

أوجد ق (∠ب) ، ق (∠ب جـ ء)

ﻡ ٤٨° ء ب جـ

الحل

المعطيات ....

....

المطلوب (١) ....

(٢) ....

البرهان



تدريب (٣)

فى الشكل المقابل :

Δ ٢ ب جـ فيه ٢ جـ = ب جـ

$\overleftrightarrow{٢ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، ق (∠ء٢جـ) = ٣٠°

أوجد قياسات زوايا Δ ٢ ب جـ

الحل

المعطيات ....

المطلوب ....

البرهان



تدريب (٤)

فى الشكل المقابل :

ع $\in$ $\overline{\text{ل ص}}$ ، س ع = ص ع

ق (∠ ل ع س) = ١٣٠° ، $\overrightarrow{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{س ص}}$

أوجد ق (∠ م ل ص) .

الحل

المعطيات ....

....

المطلوب ....

البرهان







تدريب (٥)

٢٠١٢/٢٠١١ **فى الشكل المقابل :**

Δ م ب حـ متساوى الأضلاع

و ∈ $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$ ، ء ∈ $\overleftarrow{\text{جب}}$

ق (∠ ءوجـ) = ٣٠°

أثبت أن Δ ء حـ و متساوى الساقين

الحل

المعطيات ....

....

المطلوب ....

البرهان







١ أكمل ما يأتى :

(١) الأزهر ٢٠١٢/٢٠١٣ : قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع تساوى ....

(٢) الأزهر ٢٠١٢/٢٠١٣ : زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ....

(٣) الأزهر ٢٠١٢/٢٠١٣ : مجموع قياسات زوايا المثلث المتساوى الأضلاع = ... وقياس كل منها = ...

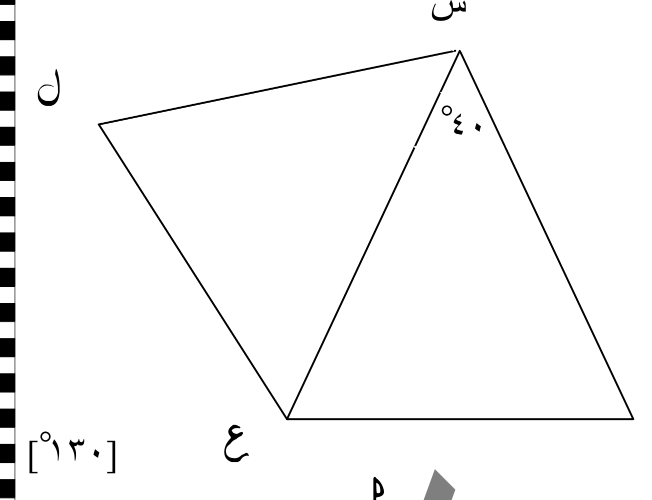
(٤) إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون ....

٢ الأزهر ٢٠١٠/٢٠١١ فى الشكل المقابل

س ص = س ع = س ل = ل ع

ق (∠ص س ع) = ٤٠°

أوجد ق (∠ص ع ل)

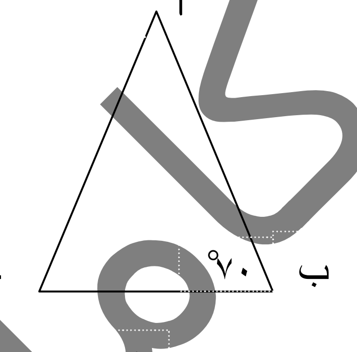


[١٣٠°]

٣ الأزهر ٢٠١٢/٢٠١٣ فى الشكل المقابل

إذا كان ﻡب = ﻡجـ، ق (∠ب) = ٧٠°

أوجد بالبرهان ق (∠جـ) ، ق (∠ﻡ)

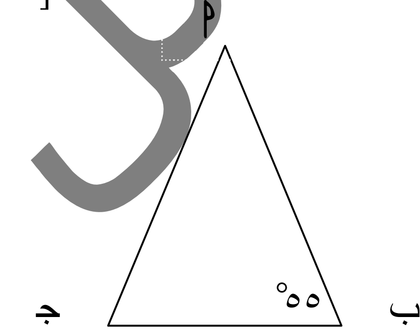


[٧٠°، ٤٠°]

٤ العام ٢٠١٠/٢٠١١ فى الشكل المقابل

Δ ﻡ ب حـ فيه ﻡب = ﻡجـ، ق (∠ب) = ٥٥°

أوجد ق (∠ﻡ)



[٧٠°]



نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

نتيجة ١

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف القاعدة ويكون عمودى عليها .

نتيجة ٢

منصف زاوية رأس المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها.

نتيجة ٣

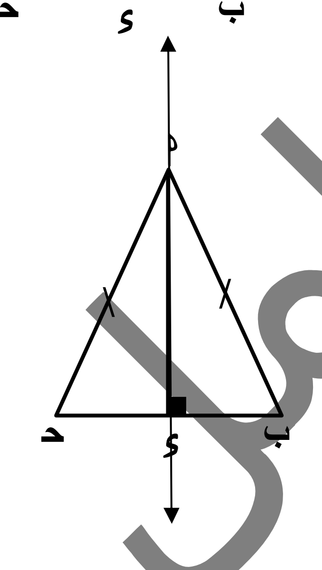
المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة و زاوية الرأس.



(١) محور تماثل المثلث المتساوى الساقين :

هو المستقيم المرسوم من رأسه عمودياً على قاعدته .

فى الشكل المقابل :



Δ ﺃ ب ﺣ فيه ﺃ ب = ﺃ ﺣ ، $\overline{\text{ﺃ ء}} \perp \overline{\text{ب ﺣ}}$

فإن : $\overleftrightarrow{\text{ﺃ ء}}$ هو محور تماثل للمثلث ﺃ ب ﺣ المتساوى الساقين

ملاحظة

** المثلث المتساوى الساقين له محور تماثل واحد فقط

** المثلث المتساوى الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل

** المثلث المختلف الأضلاع ليس له محاور تماثل



(٢) محور تماثل القطعة المستقيمة : " محور القطعة المستقيمة "

هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها

فى الشكل المقابل :

إذا كانت : ء منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، المستقيم ل ⊥ $\overline{\text{ا ب}}$

حيث ء ∈ ل فإن المستقيم ل هو محور $\overline{\text{ا ب}}$

خاصية هامة :

أى نقطة على محور القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها

فى الشكل المقابل :

** إذا كان : المستقيم ل محور $\overline{\text{ا ب}}$ ، حـ ∈ ل فإن : ا حـ = ب حـ

** إذا كان : ا هـ = هـ ب فإن : هـ ∈ ل



تدريب (١)

فى الشكل المقابل :

ا ب = ا حـ ، ق (∠ب ا ء) = ٥٥°

، $\overleftarrow{\text{ا ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$. أكمل البرهان الأتى إيجاد ق (∠ب ا حـ)

المعطيات ....

المطلوب ....

البرهـان ∵ $\overleftarrow{\text{ا ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ا ب حـ) = ق (∠ ....) = ... بالتبادل

∵ ا ب = ا حـ ∴ ق (∠ا حـ ب) = ق (∠.........) =......

∵ مجموع قياسات ....

∴ ق (∠ب ا حـ) = ...



تدريب (٢)

٢٠١٣/٢٠١٤في الشكل المقابل :

م ب = م حـ ، $\overleftrightarrow{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

، ب جـ = ١٠ سم ، ق (∠ب م ء) = ٢٥° أوجد

طول $\overline{\text{ب ء}}$ ، ق (∠ء م حـ)

م
٢٥°
ب ء حـ
١٠سم

الحل

المعطيات ....

....

المطلوب (١) .... ، ....

(٢) ....

البرهان





تدريب (٣)

٢٠١٣/٢٠١٤ فى الشكل المقابل :

٦ ب جـ مثلث فيه ٦ ب = ٦ حـ

$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ أثبت أن

Δ ٦ س ص متساوى الساقين

٦ س ص ب جـ

الحل

المعطيات ....

....

المطلوب ....

البرهان

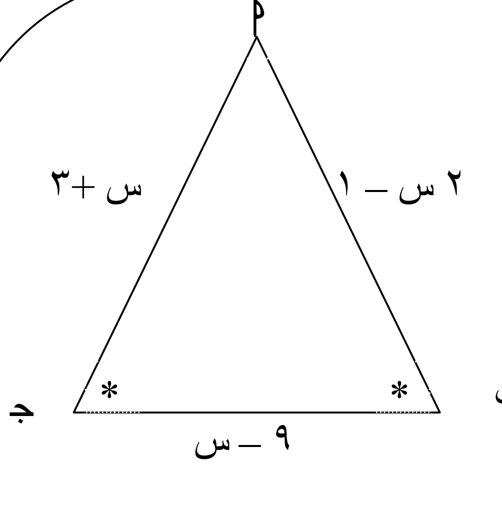






تدريب (٤)

فى الشكل المقابل :



Δ م ب حـ فيه ق (<ب) = ق (<جـ)

أوجد محيط Δ م ب حـ .

الحل

المعطيات ....

....

المطلوب ....

البرهان ∵ ق (<ب) = ق (<جـ) ∴ م ب = م حـ

∴ ٢ س – ١ = س +٣ ⟸ ٢ س – س = ٣ + ١

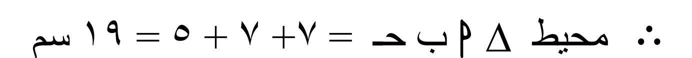
∴ س = ٤ ⟸

م ب = ٢ س – ١ = ٢ x ٤ + ١ = ٧ سم

م جـ = س +٣ = ٤ + ٣ = ٧ سم

ب جـ = ٩ – س = ٩ – ٤ = ٥ سم





∴ محيط Δ م ب حـ = ٧+ ٧ + ٥ = ١٩ سم



تمارين (٣)

١ أكمل ما يأتى :

(١) العام ٢٠٠٩/٢٠١٠ منصف زاوية رأس المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون ....

(٢) العام ٢٠٠٩/٢٠١٠ أى نقطة على محور القطعة المستقيمة تكون ....

(٣) يسمى المستقيم العمودى على القطعة المستقيمة من منتصفها .... لهذه القطعة المستقيمة

(٤) العام ٢٠١٢/٢٠١٣ فى Δ أ ب حـ إذا كان $\overline{أب} \perp \overline{بحـ}$ ، أ ب = ب حـ فإن ق (∠أ) = ...

(٥) إذا كان قياس زاويا مثلث متساوى الساقين = ١٠٠° فإن قياس إحدى الزاويتين الأخرتين = ...

(٦) فى المثلث المتساوى الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة ٤٥° كان المثلث ....

(٧) قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع = ...

(٨) إذا كان قياس زاوية رأس مثلث متساوى الساقين = ٧٠° فإن قياس إحدى زاويتى القاعدة = ...

(٩) إذا كان قياس إحدى زاويتى قاعدة مثلث متساوى الساقين ٥٠° فإن قياس زاوية رأسه = ...

(١٠) إذا كان قياسا زاويتين فى مثلث ٦٥° ، ٥٠° كان المثلث ....

(١١) عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع ....

(١٢) يسمى المستقيم العمودى على القطعة المستقيمة من منتصفها ....

(١٣) إذا كان أ ب حـ ء شكل رباعى فيه أ ب = أ ء ، ب حـ = حـ ء فإن $\overleftrightarrow{أحـ}$ ....$\overleftrightarrow{بء}$

(١٤) إذا كان Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق (∠حـ) = ٤٥° فإن عدد محاور تماثله ....

(١٥) إذا كان Δ أ ب حـ له محور تماثل واحد ، كان ق (∠حـ) = ١٢٠ فإن ق (∠ب) = ...

٢ إختر الإجابة الصحيحة :

(١) ٢٠١٣/٢٠١٤ عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين .... [صفر ، ١ ، ٢ ، ٣]

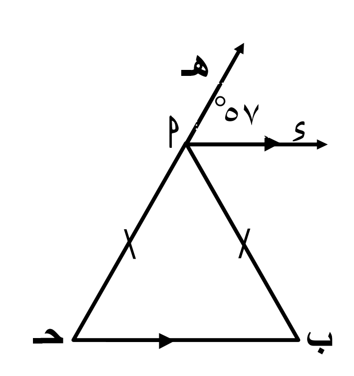
(٢) ٢٠١٢/٢٠١٣ إذا كانت أ نقطة على محور تماثل $\overline{سص}$ فإن $\overline{أس}$ .... $\overline{أص}$ [// ، ⊥ ، = ، ≡]

(٣) ٢٠١٣/٢٠١٤ إذا كان قياسا زاويتين فى مثلث ٦٥° ، ٥٠ فإن المثلث يكون ....

[متساوى الأضلاع ، متساوى الساقين ، قائم الزاوية ، مختلف الأضلاع]



٣ **فى الشكل المقابل :**



أ ء // ب حـ ، هـ ∈ أ حـ

، أ ب = أ حـ ، ق (< ء أ هـ) = ٥٧°

أوجد ق (< ب أ حـ)

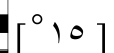
[٦٦°]

٤ **فى الشكل المقابل :**

أ ب = أ حـ ، ء ب = ب حـ = ء حـ

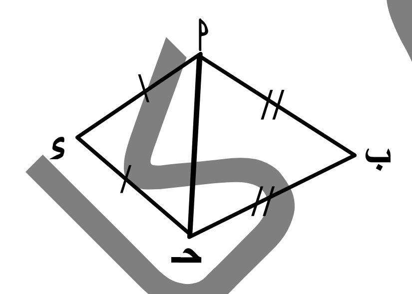
، ق (< ب أ حـ) = ٣٠° أوجد : ق (< أ ب حـ)

، ق (< أ ب ء)



[١٥°]

٥ **فى الشكل المقابل :**



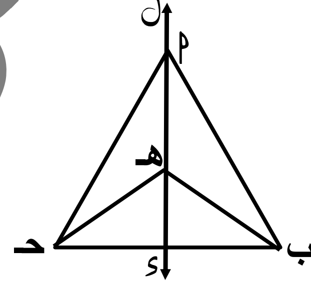
أ ب = ب حـ ، أ ء = حـ ء ،

ق (< ء أ ب) = ١٢٠° ، ق (< ء) = ٨٠°

أوجد ق (< ب)

[٤٠°]

٦ **فى الشكل المقابل :**



المستقيم ل محور تماثل ب حـ ، حـ ء = ٥ سم

، ب هـ = ٦ سم ، ق (< هـ حـ ب) = ٣٥°

أوجد طول كل من : ب ء ، حـ هـ

، ق (< هـ ب حـ)

[٥ سم ، ٦ سم ، ٣٥°]



التبايـن



يعنى وجود إختلاف بين أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا .

نعلم أن :

كل من : > ، < تسمى علامة تباين وتستخدم علاقة تباين للمقارنة بين الأطوال و القياسات المختلفة

مسلمات التباين لأى ثلاثة أعداد س ، ص ، ع :

إذا كان : س > ص فإن : س + ع > ص + ع

إذا كان : س > ص فإن : س – ع > ص – ع

" عند ضرب طرفى المتباينة فى عدد موجب فإن إتجاه علامة التباين لا يتغير "

إذا كان : س > ص ، ع > ٠ عدداً موجباً فإن : س ع > ص ع

" عند ضرب طرفى المتباينة فى عدد سالب فإن إتجاه علامة التباين يتغير "

إذا كان : س > ص ، ع <٠ عدداً سالباً فإن : س ع < ص ع

إذا كان : س > ص ، ص > ع فإن : س > ع

إذا كان : س > ص ، م > ب فإن : س + م > ص + ب

تدريب (١) فى الشكل المقابل أكمل مستخدماً > أو <



** م ب .... حـ ء

** م ب .... ب جـ

** م حـ .... ب ء



تدريب (٢) Δ م ب حـ فيه ق (ب) = ٥٠° ، ق (حـ) = ٦٠° إكمل مستخدماً > أو <

** ق (ب) .... ق (م)

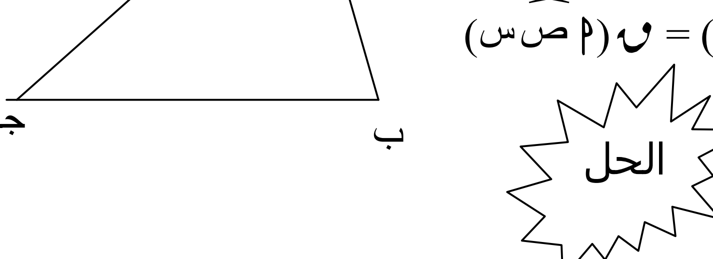
** ق (م)........... ق (حـ)

تدريب (٣) إذا كانت س ، ص ، ع أعداد موجبة وكان س > ص فإ ن

س + ع .... ص + ع [< ، > ، = ، ≡]

تدريب (٤)

فى الشكل المقابل :



∆ م ب حـ فيه م حـ > م ب ، س ∈ $\overline{\text{م ب}}$

ص ∈ $\overline{\text{م جـ}}$ بحيث ق (م س ص) = ق (م ص س)

أثبت أن ص جـ > س ب

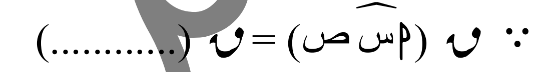
الحل

المعطيات ....

....

المطلوب ....

البرهان ∵ ق (م س ص) = ق (...........)



∴ م ص = ... ⟸ (١)

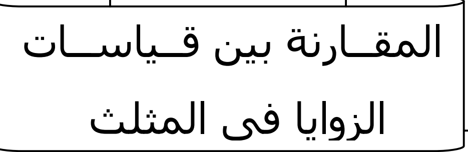
∵ .... > م ب ⟸ (٢)

بطرح ١ من ٢

م جـ – .... > .... – م س

∴ ص جـ > ....



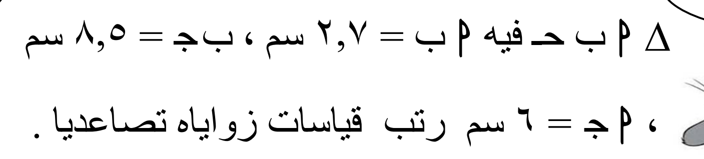


المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث



إذا أختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول يقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للآخر .







Δ أ ب حـ فيه أ ب = ٢,٧ سم ، ب جـ = ٨,٥ سم ، أ جـ = ٦ سم رتب قياسات زواياه تصاعديا .



نرتب الأضلاع تصاعديا كالأتى : أ ب < أ جـ < ب جـ

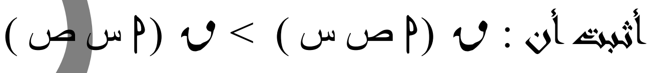
∴ الترتيب التصاعدى للزوايا هو جـ^ < ب^ < أ^



فى الشكل المقابل :



أ ب > أ حـ ، س منتصف أب ، ص منتصف أحـ

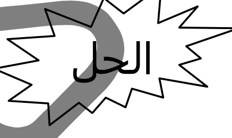


أثبت أن : ق (أ ص س) > ق (أ س ص)

أ

س ص

حـ ب



المعطيات ....

المطلوب ....

البرهان ∵ Δ أ ب حـ فيه .... > أ حـ ∴ ق (.........) > ق (......)

∵ س منتصف ....، ص منتصف .... ∴ .... // ......

∴ ق (أ س ص) = ق (...)

ق (..........) = ق (جـ^) بالـ ....

∴ ق (.........) > ق (..........)





تدريب (٧)

فى الشكل المقابل :

م ب جـ ء شكل رباعى فيه م ء = جـ ء

، ب جـ > م ب برهن أن ق (م̂) > ق (جـ̂)

الحل

المعطيات ....

المطلوب ....

العمل ....

البرهان





تدريب (٨)

فى الشكل المقابل :

س ص > س ل ، ص ع > ع ل

برهن أن (س ل̂ ع) > **و** (س ص̂ ع)

س

ص

ل

ع

الحل

المعطيات ....

المطلوب ....

العمل ....

البرهان







١ أكمل ما يأتى :

(١) لأى ثلاثة أعداد س ، ص ، ع إذا كانت س > ص ، ع < ٠ فإن س ع .... ص ع

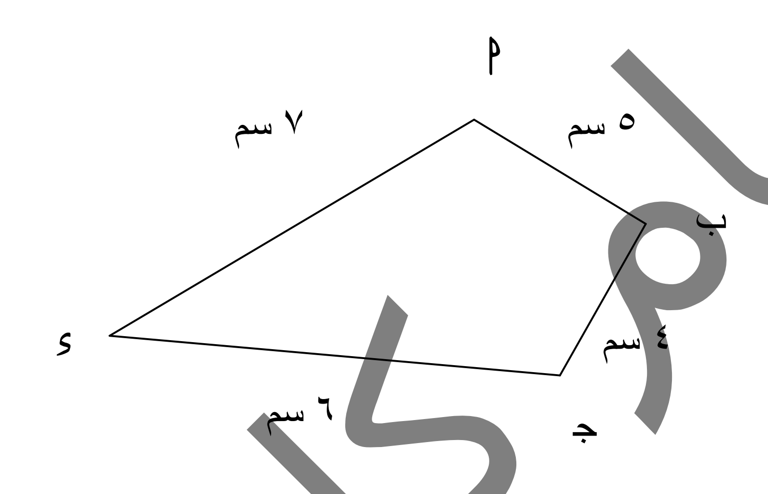
(٢) إذا أختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول يقابله ....

(٣) أكبر أضلاع المثلث طولا يقابل ....فى القياس وأصغر أضلاع المثلث يقابل ....فى القياس

(٤) فى Δ ٢ ب حـ إذا كان ٢ ب > ب جـ فإن ٯ(٢̂) > ٯ (...)

٢ ٢٠١٣/٢٠١٤ Δ ٢ ب حـ فيه ٢ ب = ٦سم ، ٢ جـ = ٧ سم ، ب جـ = ٨سم رتب قياسات زواياه تصاعديا

٣ فى الشكل المقابل:



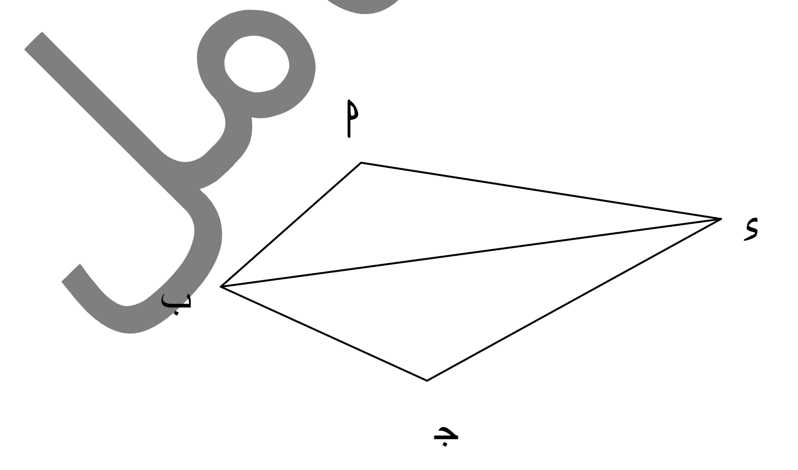
٢ ب حـ ء شكل رباعى فيه

٢ ب = ٥ سم ، ب جـ = ٤ سم

حـ ء = ٦سم ، ٢ ء = ٧سم

برهن أن ٯ(ب̂) > ٯ (ء̂)

٤ فى الشكل المقابل:



٢ ب < ٢ ء ، ب جـ < جـ ء

أثبت أن ٯ(٢ ب̂ جـ) > ٯ (٢ ء̂ جـ)



المقـارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث

نظرية٤

إذا إختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول من الذى يقابل الأخرى

نتائج

نتيجة١

فى المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث

فى الشكل المقابل : Δ ﺃ ب حـ قائم الزاوية فى ب

فإن الوتر ﺃ حـ هو أكبر الأضلاعطولاً

ملاحظة

فى المثلث المنفرج الزاوية يكون الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أكبر أضلاع المثلث طولاً

نتيجة٢

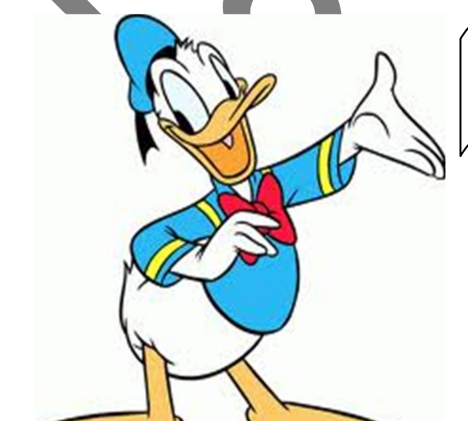
طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أى قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم .

تعريف

بعد أى نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم .

تدريب (١)

Δ ﺃ ب حـ فيه ق($\hat{ﺃ}$) = ٥٠° ، ق($\hat{ب}$) = ٧٠° رتب أطوال أضلاعه تنازليا .



الحل

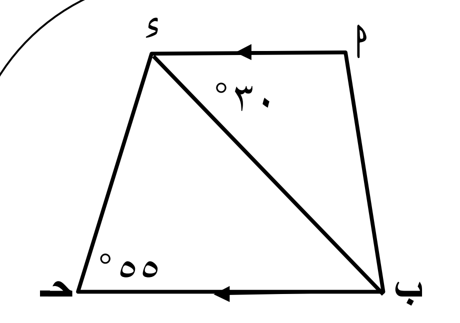
ق($\hat{جـ}$) = ١٨٠° - (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°

∵ ترتيب الزوايا تنازليا هو ($\hat{ب}$) > ($\hat{جـ}$) > ($\hat{ﺃ}$)

∴ ترتيب الأضلاع تنازليا هو ﺃ جـ > ﺃ ب > ب جـ



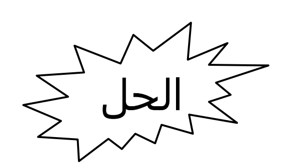
تدريب (٢)



فى الشكل المقابل :

م ء // ب حـ ، ق (م ء ب) = ٣٠°

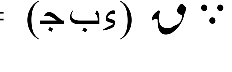
، ق (حـ) = ٥٥° أثبت أن : ب ء > حـ ء



المعطيات ....

....

المطلوب ....

∵ .... // .... ،  قاطع لهما

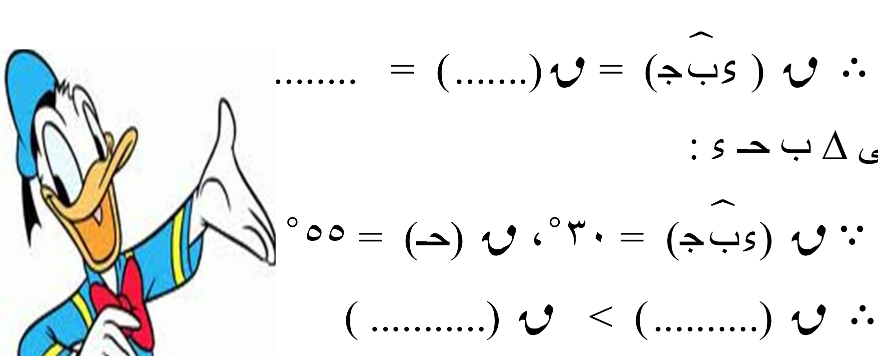
∴ ق (ءبجـ) = ق (.......) = ...

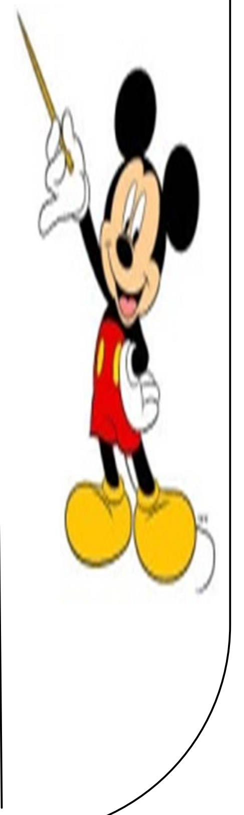
فى Δ ب حـ ء :

∵ ق (ءبجـ) = ٣٠°، ق (حـ) = ٥٥°

∴ ق (.........) > ق (..........)

∴ ب ء > ....







تدريب (٣)

في الشكل المقابل :

Δ أ ب جـ فيه $\overleftarrow{\text{جء}}$ ينصف جَ^

ويقطع $\overline{\text{أب}}$ في ء ، ق(ب^ءج) = ١٠٠°

ءب = ءج **برهن أن** أج > ءب

الحل

المعطيات ....

....

المطلوب ....

البرهان





تدريب (٤)

فى الشكل المقابل :

$\triangle$ ٵ ب حـ فيه ء ∈ جب ، هـ ∈ ٵجـ

ق (ٵ ب ء) = ١١٠°، ق (ب حـ هـ) = ١٢٠°

برهن أن ٵب > ب جـ

م

جـ ١٢٠° ب ١١٠° ء

هـ

الحل

المعطيات ....

....

المطلوب ....

البرهان

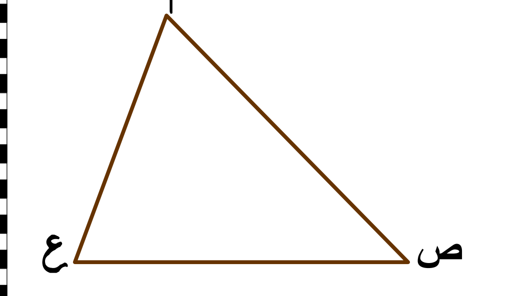




متباينة المثلث

حقيقة

فى أى مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث



أى أن : فى أى Δ م ص ع يكون :

م ص + ص ع > م ع

ص ع + م ع > م ص

م ص + م ع > ص ع

مثلا

الأعداد : ٣ ، ٤ ، ٨ لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

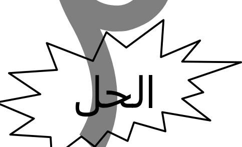
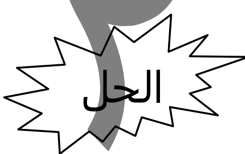
لأن : ٣ + ٤ = ٧ > ٨ " لا تحقق متباينة المثلث "

تدريب (٤)

أى من هذه الأعداد يصلح أطوالاً لأضلاع مثلث ؟

(١) ٢ ، ٧ ، ٤ (٢) ٥ ، ٨ ، ٣

(٣) ٣ ، ٦ ، ٨ (٤) ٥ ، ٥ ، ٥

تدريب (٥)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ٢٠١٢/٢٠١٣ طول أى ضلع فى مثلث .... مجموع طولى الضلعين الاخرين .

[ضعف ، أكبر من ، يساوى ، أقل من]

٢ ٢٠١١/٢٠١٢ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٣ سم ، ٧ سم فإن طول الضلع الثالث يساوى ....سم . [٣ ، ٧ ، ١٠ ، ٨]



إذا علم طولا ضلعين فى مثلث فإنه يمكن إيجاد الفترة التى ينتمى اليها طول الضلع الثالث كالاتى :

١ نحسب الفرق بين الضلعين

٢ نحسب مجموع الضلعين

فتكون الفترة التى ينتمى اليها طول الضلع الثالث =] الفرق بين الضلعين ، مجموع الضلعين [

تدريب (٥)

أوجد الفترة التى ينتمى اليها طول الضلع الثالث فى كل من المثلثات الأتية إذا كان طولا الضلعين الاخرين هما : (١) ٦سم ، ٩سم (٢) ٢,٩ سم ، ٣,٢ سم

الحل

أولا : الفرق = ... – ...... = ... سم

المجموع = ... + ... = ... سم

∴ طول الضلع الثالث ∋] .... ، ... [

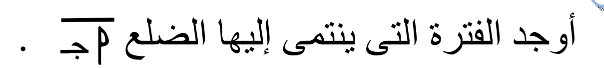
ثانيا : الفرق = ... –...... = ... سم

المجموع = ... + ... = ... سم

∴ طول الضلع الثالث ∋] .... ، .... [



٢٠٠٩/ ٢٠١٠ فى Δ ﻫ ب حـ إذا كان ﻫ ب = ١٠ سم ، ب حـ = ٨,٥ سم


أوجد الفترة التى ينتمى إليها الضلع ﻫجـ .

الفرق = ... – .... = ... سم

المجموع = ... + ... = ... سم

⟸ ﻫ حـ ∋] ......، ...... [



١ أكمل ما يأتى :

(١) فى Δ س ص ع إذا كان : س ص = ٣ سم ، ص ع = ٤ سم فإن : ق (......) > ق (.......)

(٢) إذا كان Δ م ب حـ قائم الزاوية فى ب فإن : .... > م ب

(٣) فى Δ م ب حـ إذا كان م ب > م حـ ، ق (ب) = ٤٠ ° فإن ق (حـ) .... ٤٠ °

(٤) إذا كان Δ س ص ع منفرج الزاوية فى ع فإن : س ص .... ص ع

(٥) فى Δ م ب حـ إذا كان ق (م) = ٥٠ ° ، ق (ب) = ٧٠ ° فإن م ب > ....

(٦) إذا كان Δ م ب حـ منفرج الزاوية فى ب فإن أكبر الأضلاع طولاً هو ....

(٧) إذا كان Δ س ص ع فيه س ص = ٧ سم ، ص ع = ٦ سم ، ع س = ٥ سم فإن

أصغر زواياه الداخلة فى القياس هى ....

(٨) فى Δ م ب حـ إذا كان م ب = م حـ ، ق (م) = ٥٠ ° فإن م ب > ....

(٩) فى Δ م ب حـ يكون : ب حـ .... م ب + م حـ

(١٠) إذا كان ٤ سم ، ٩ سم طولا ضلعين فى مثلث فإن أصغر عدد صحيح يمثل طول الضلع

الثالث = ...

(١١) إذا كان ٥ سم ، ٨ سم طولا ضلعين فى مثلث فإن أكبر عدد صحيح يمثل طول الضلع

الثالث = ...

(١٢) أكبر الأضلاع طولا فى المثلث القائم الزاوية هو ....

(١٣) إذا كان ٣ سم ، ٧ سم طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين طول الضلع الثالث = ...

(١٤) فى Δ م ب حـ إذا كان م ب = ٣ سم ، م حـ = ٥ سم فإن : ب حـ ∈] .... ، .... [

(١٥) بعد أى نقطة عن مستقيم معلوم هو ....

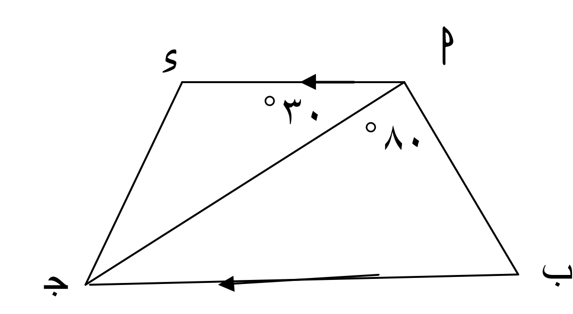
٢ Δ م ب حـ فيه ق (م̂) = ٤٠ ° ، ق (ب̂) = ٧٥ ° رتب أطوال أضلاعه تصاعديا

[ب حـ < م ب < م جـ]





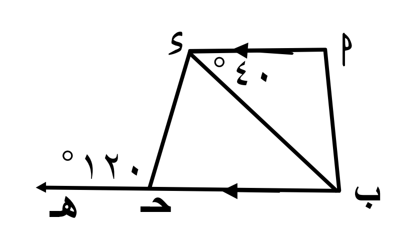
٣ فى الشكل المقابل :



م ء // ب جـ ، ق (ب م جـ) = ٨٠° ،

ق (ء م جـ) = ٣٠° برهن أن ب جـ > م ب .

٤ فى الشكل المقابل :



م ء // ب حـ ، ق (م ء ب) = ٤٠°

، ق (ء حـ هـ) = ١٢٠° أثبت أن : ء ب > ء حـ

٥ أى من هذه الأعداد يصلح أطوالاً لأضلاع مثلث مع ذكر السبب

(١) ٢ ، ٤ ، ٥ (٢)٦ ، ٧ ، ١٣

(٣) ٦، ٦ ، ٦ (٤) ٦ ، ٤ ، ١١

٦ أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث لكل من المثلثات الآتية إذا كان طولا الضلعين الآخرين هما :

(١) ٦ سم ، ٩ سم] ٣،١٥ [

(٢) ٥ سم ، ١٢ سم] ٧، ١٧ [

(٣) ٧ سم ، ١٥ سم] ٨، ٢٢[